УДК 550.831+838

Ю. Дубовенко, канд. фіз.-мат. наук

Початкове наближення для обчислення складного щільнісного контакту

Запропоновані аналітичні моделі гравітаційного поля та горизонтально-шаруватого геологічного середовища з кількома густинними межами розділу шарів під поверхнею. Модель поля отримана з рівняння сили тяжіння, що випливає з розгляду плоского нормального потенціалу сили тяжіння у локальному околі точки вимірювань. Введено нову модель середовища – клас Чорного контактних поверхонь. Подано нову схему визначення початкового наближення густинного контакту і його асимптот у багатошаровому геологічному середовищі за допомогою кількох 'контактних' алгоритмів.

There are offered analytical models for the gravity field and for the horizontally layered geological media with a several density interfaces beneath the surface. The gravity model is acquired from the gravity equation, derived from 2-D normal gravity potential view in a local neighborhood of the points measured. A new media model added – a Chorny contact surfaces class. A new scheme for definition is given for the starting approximation of density interface and its asymptotes in the multilayered geological media by means of several 'contact' algorithms.

> Основний напрям наукового прогресу – створення загальних математичних моделей в геології, геофізиці і надалі – створення геолого-математических теорій… (Елланський М.М., 2003, www.mmell.narod.ru)

Вступ. Нині чималі зусилля геофізиків спрямовані на переінтерпретацію картографічного матеріалу, отриманого за даними зйомок 30-річної давності, зважаючи на різке обмеження обсягу геологорозвідки. Проте, через підвищені вимоги до точності і ефективності інтерпретації, така переобробка великих обсягів геофізичних даних потребує нових підходів до чисельного обґрунтування методів, використаних при підготовці і обробці подібного картографічного матеріалу. Цілком логічно об'єднати розвинені на попередньому етапі розвитку геофізики математичні конструкції із сучасним інтерактивним програмним забезпеченням, щоб комплексно вирішити проблеми оцифровування, візуалізації і тлумачення геофізичних даних. Проблему тлумачення даних, найважливіша для застосувань (втім, тісно переплетена на рівні первинної обробки із першими двома), вирішують останнім часом у руслі перебудови аналітичної і обчислювальної бази теорії інтерпретації потенціальних полів, яка забезпечує становлення нової парадигми в теорії і практиці інтерпретації.

Сучасні методи обробки геофізичних даних розвиваються із прицілом на створення цифрових аналітичних моделей поля і геологічного середовища і високоточних алгоритмів, орієнтованих на застосування в пакетах ГІС, особливо при відображенні вхідної інформації і результатів її трансформації та зіставленні із апріорною інформацією, також поданою в графічному виді (т. зв. візуальна інтерпретація, рис. 1).

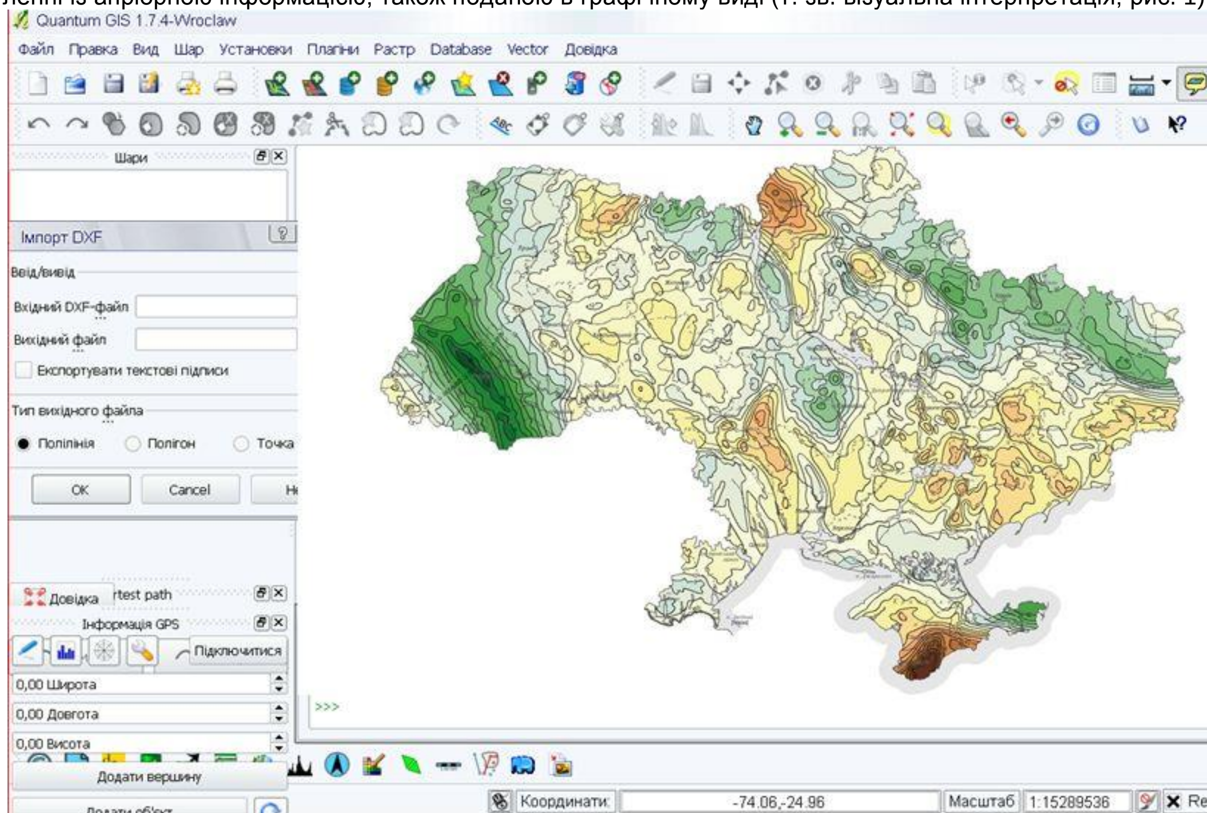


Рис. 1. Карта гравітаційних аномалій України в середовищі вільно поширюваної ГИС Quantum GIS.

Власне, "пошарова" обробка являє новий етап якісної інтерпретації, в якому можливості подання інформації у вигляді електронного журналу вимірів [13] можна використати для попередньої обробки інформації в середовищі спеціалізованих пакетів загального і спеціального призначення. Як приклад такої попередньої обробки, можна вказати процедури: виділення регіонального фону, наприклад, шляхом мінімізації нев'язки між набором даних і деяким поліномом в середовищі Matlab; попередня фільтрація вимірів в середовищі Excel; знаходження особливих точок поля методом зворотної інтерполяції полінома Лагранжа в Maple, редукції поля за допомогою алгоритмів В.М. Страхова, реалізовані в Python, і т.п. Одним із найбільш вдалих прикладів цифрової якісної інтерпретації можна вважати приклад обробки значень поля сили тяжіння в зв'язці ПЗ MapInfo + CorelDraw (рис. 2) [13], що в жодному разі не виключає їх заміни в осяжному майбутньому на open-source аналоги.

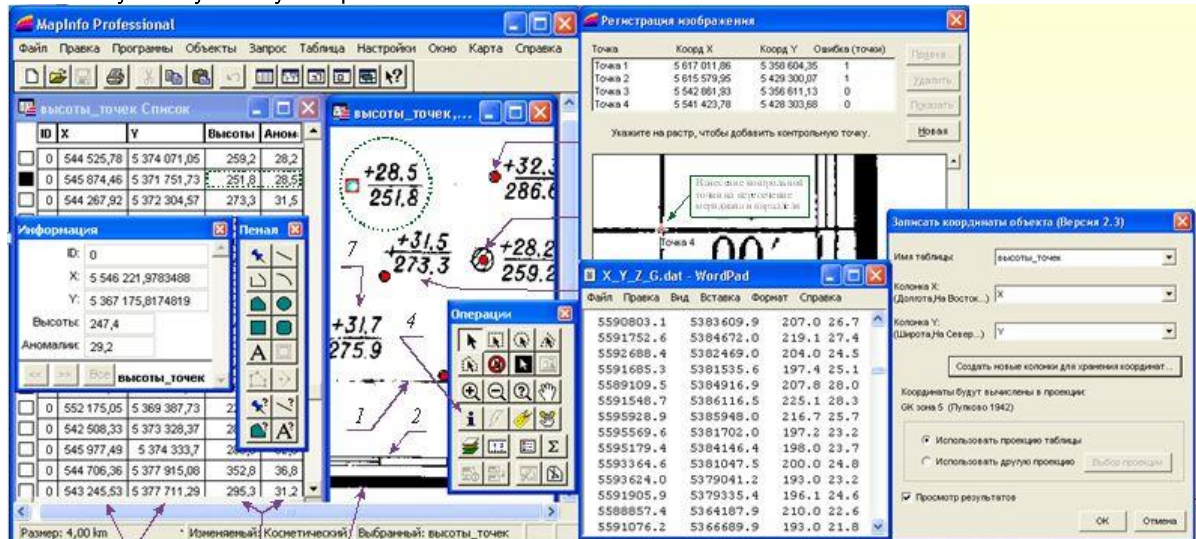


Рис. 2. Попередня обробка гравітаційних аномалій в зв'язці MapInfo + CorelDraw.

Проте ми торкнемося іншого напряму у рамках детермінованого підходу до інтерпретації даних потенціальних полів – розробки аналітичних конструкцій геофізичного поля і геологічного середовища. Щодо математичних конструкцій поля, відсилаємо зацікавлених читачів до праці [12], а серед моделей середовища автору близькі моделі густини типу контакту, одну з яких пропонуємо вашій увазі.

В розробці таких конструкцій заради підвищення точності інтерпретації даних геофізики обов'язково слід врахувати умови адекватності постановок сучасним вимогам до отримання вихідних геофізичних даних і їх обробки. В цілому, суть цих вимог така:

- висока точність і технологічність алгоритмів і програм, їх переносимість;
- адаптація моделей поля до задання початкових вимірів на коротких профілях;
- адаптація моделей середовища до його складного (нелінійного неоднорідного) стану.

Визначення контакту у відомих моделях середовища Страхова, Нумерова, Маловичка [11] замкнена на обчислення різниці ундуляцій деякої теоретичної моделі середовища від деякого опорного її елемента, від якого ці ундуляції не надто сильно ухиляються. Каверза полягає в тому, що при цьому необхідно заздалегідь знати деякі елементи геометрії (глибину, форму, орієнтацію) цього опорного елемента (модельного тіла або контакту), як початкового наближення ітерацій. Від вибору вдалого початкового наближення залежить, в цілому, ефективність будь-якого із існуючих ітераційних алгоритмів [7].

Ми вивели для горизонтально-шаруватого середовища з кількома густинними межами шарів аналітичні моделі поля і геологічного середовища, в яких ці опорні елементи розраховуються в процесі ітерацій. Модель поля є рівнянням сили тяжіння, і отримане з розгляду нормального потенціалу сили тяжіння в локальному околі точки вимірів в двовимірному поданні. Розміри локального околу істотно залежать від розмірів тяжіючої області і точності апроксимації нормальної складової потенціалу [5].

Аналітична модель поля. Нехай у тривимірному необмеженому Евклідовому просторі $E^{(3)}$ дві області G_1 і G_2 вкладені одна в одну і відстань між їх межами ∂G_1 і ∂G_2 – $\mathrm{dist}(\partial G_1, \partial G_2) \geq 0$ при $G_1 \cap G_2 = G_2$. В області G_2 початок координат і точки області $G^- = G_1 \cup \overline{G}_2$, $\overline{G}_2 = G_2 \cup \partial G_2$, позначмо через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, а точки замкнутої необмеженої області $\overline{G}^+ = E^{(3)} \setminus G$, $\partial G^+ = \partial G_1$ – через $x = (x_1, x_2 x_3)$, тоді $\mathrm{dist}(x,\xi) = |x - \xi| = \left(\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2 \right)^{1/2} = \gamma(x,\xi)$.

Нехай область $\overline{G}_2$ заповнена масами з щільністю $\delta_2(\xi)$, а область $G_0 = G_1 \setminus \overline{G}_2$ – масами з щільністю $\delta_1(\xi)$ (рис. 3). Позначимо через $\overline{n}(x)$ одиничну нормаль до поверхні ∂G^+, зовнішню щодо G^-; тоді нормальна складова сили тяжіння дорівнює

$$u(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial \overline{n}(x)} = f \int_{G^-} \delta(\xi) \frac{\partial \gamma^{-1}(x,\xi)}{\partial \overline{n}(x)} d\xi \,, \tag{1}$$

де $\delta(\xi) = \delta_2(\xi) - \delta_1(\xi),\ \xi \in \overline{G}_2,\ \delta(\xi) = 0,\ \xi \in \overline{G}_0$, f – гравітаційна константа.

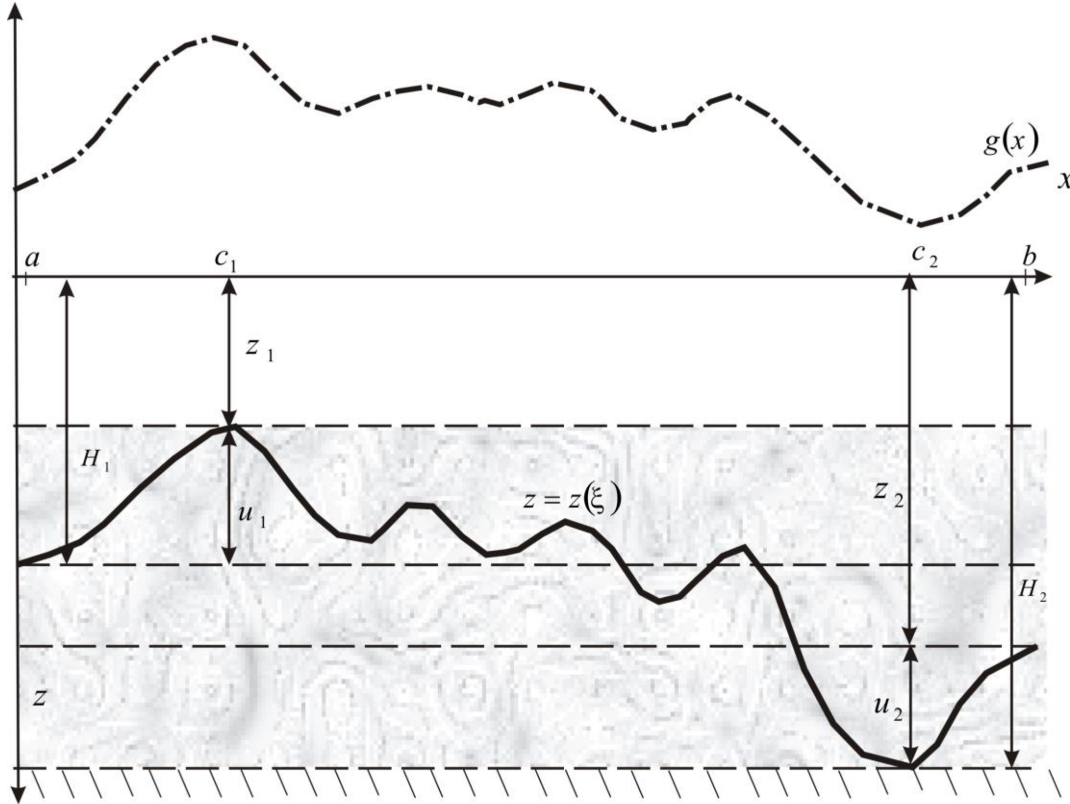


Рис. 3. Модель контактного середовища в класі Чорного.

Взагалі кажучи, силу тяжіння описує функція

$$u(x) = \left|\operatorname{grad} V(x)\right| = f \int_{G^-} \delta(\xi) \left|\operatorname{grad}_x r^{-1}(x,\xi)\right| d\xi \,, \tag{2}$$

оскільки значення сили тяжіння – це значення модуля градієнта потенціалу [4], а не складові тяжіння, у тому числі і (1).

Спростимо вираз (1), розглянувши малий локальний окіл Ω точки x. У цьому околі, з відомою долею наближення [5], ділянку $\partial G = \Omega \cap \partial G^+$ межі ∂G^+ вважаємо "необмеженою" площиною: $\partial G = \{x : x_3 = x_3(x_1, x_2) = \text{const}, (x_1, x_2) \in S_0\}$, де $S_0 = \Omega \cap \partial G^+$. Розташувавши в цій площині прямокутну систему координат так, щоб вісь ox_3 була перпендикулярна до площини, отримаємо

$$\overline{n}(x) \equiv \overline{z}\,,\ x = (x_1, x_2, x_3)\,,\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,,\ \Omega^+ = \Omega \cap G^+\,,\ \Omega^- = \Omega \cap G^-\,,\ \partial G = \Omega \cap \partial G^+ .$$

Нехай в околі Ω^- функції $\delta_1(\xi) = \text{const}$, $\xi \in \overline{G}_2 \subset \Omega^-$, $\delta_2(\xi) = \text{const}$, $\xi \in \Omega^- \cap G_1$, і $\delta = \delta_2 - \delta_1$, а $\overline{G}_2$ – власна підмножина Ω^-. Фактичні розміри області Ω залежать, передусім, від розмірів тяжіючої області $\overline{G}_2$, що вивчається, і точності апроксимації виразу [5], тобто

$$\left| f \int_{G^-} \delta(\xi_1) \frac{\partial \gamma^{-1}(x_1,\xi_1)}{\partial \overline{n}(x)} d\xi_1 - f\sigma \int_{G^-} \frac{\partial \gamma^{-1}(x_1,\xi_1)}{\partial x_3} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right| < \varepsilon \,. \tag{3}$$

Якщо $\varepsilon > 0$ досить мале, то Ω вибрана вдало. Межу Ω вибираємо досить гладкою, для якої $\partial G_2 = \left\{x : x_i = x_i(x_j, x_k), (x_j, x_k) \in \partial S_i,\ i, j, k = 1,2,3; \cup \partial S_i = \partial G_2; x_i \in C^{(1,\alpha)}(\partial S_i)\right\}$.

За таких припущень про середовище отримуємо потенціал тяжіння

$$u(x_{1,2,3}) \equiv \frac{\partial V(x_{1,2,3})}{\partial x_3} = k \int_{\Omega^-} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sum_{i=1}^{3} (\xi_i - x_i)^2} \,,\ k = f\sigma \tag{4}$$

Якщо маси, зосереджені в Ω^-, генерують аномалії $u(x_i)$, витягнуті, скажімо, уздовж осі ox_2, їх краще вимірювати по профілях, паралельних $o\xi_1$. Формула (4) малопридатна для обробки таких вимірів. Проінтегруємо вираз (4) по ξ_2 і після ряду аналітичних перетворень отримаємо:

$$u(x_1, x_3) = 2k\iint_S \frac{\xi_3 - x_3}{(\xi_2 - x_1)^2 + (\xi_3 - x_3)^2} d\xi_1 d\xi_3 ,$$

де S – проекція $\overline{G}_2$ на площину ox_1x_3, $k = f\sigma$. При $x_3 = 0$, $\xi_3 = \xi_3(\xi_1)$, $a \le \xi_1 \le b$ отримаємо модель контакту у вигляді

$$u(x,0) = k\int_a^b d\xi_1 \int_{\xi_3^{(1)}}^{\xi_3^{(2)}} \frac{2\xi_3}{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^2} d\xi_3 = k\int_a^b \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(2)}(\xi_1)}{(\xi_1 - x_1)^2 + \xi_3^{(1)}(\xi_1)} d\xi_1 , \quad (5)$$

де $\xi_3^{(1)} = \xi_3^{(1)}(\xi_1)$ і $\xi_3^{(2)} = \xi_3^{(2)}(\xi_1)$, $a \le \xi_1 \le b$ – криві, що обмежують знизу і згори тяжіючу плоску область S.

Аналітична модель середовища. Нехай G^- – горизонтальна смуга, обмежена згори і знизу прямими $z_1 = h_1$, $z = h_2$, $0 < h_1 < h_2 < +\infty$, яка розділена на 2 шари із щільністю δ_1 і δ_2 нескінченно гладкою кривою ∂G^-, зірчастою щодо нескінченно віддаленої точки, з асимптотою $z = h$, $h_1 < h < h_2$, причому

$$|z(\xi) - h| \le k|\xi|^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad |\xi| > \xi_0, \quad z(\xi) \in \partial G \quad (6)$$

Якщо значення h і величина стрибка щільності $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ відомі, то межа ∂G розділу шарів за зовнішнім полем відновлюється однозначно. Розв'язок оберненої задачі про контактну поверхню з класу (6) єдиний [8], якщо відомі стрибок щільності $\Delta\delta$ і скінченна дуга кривої $z(\xi)$ із (6).

Введемо спеціальне позначення для класу (6) $Ch^{(1,\beta)}(-\infty,\infty)$ і назвемо його класом Чорного – на честь вітчизняного науковця-геофізика А.В. Чорного, який заклав підвалини чіткого алгоритму дослідження функціональних множин в царині контактних поверхонь. Очевидно, що

$$Ch^{(1,\beta)}(-\infty,\infty) \subset St^{(1,\beta)}(-\infty,\infty) , \; St^{(1,\alpha)}(a,b) \subset St^{(1,\alpha)}(-\infty,\infty) . \quad (7)$$

У такій постановці важливою є проблема розділення полів, яка є самостійною задачею і виходить за рамки цієї статті.

Щоб розв'язати нелінійне інтегральне рівняння (5), яке описує контакт, обмежений асимптотами у плоскій області G_2, його слід тлумачити як функціонал щодо шуканої функції $x_3(\xi_1)$ на деякому лінеалі. Для цього функціоналу нескладно знайти приріст $\Delta g(x,z) = g(x, z+h) - g(x,z)$, отримуючи

$$\Delta g(x,z) = -\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi) d\xi - \int_a^b \left\{ \frac{[(\xi - x)^2 - z^2(\xi)]}{[(\xi - x)^2 + z^2(\xi)]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3}\left[-\frac{3\delta z(\xi)}{\{(\xi - x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^2} + \frac{4\delta z(\xi)}{\{(\xi - x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^3} \right] h(\xi) \right\} h^2(\xi) d\xi ,$$

де $\delta z(\xi) = z(\xi) + \theta(\xi)h(\xi)$. Звідси

$$-\int_a^b \frac{2z(\xi)}{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)} h(\xi) d\xi = \int_a^b \ln\frac{(\xi - x)^2 + z^2(\xi)}{(\xi - x)^2 + [z(\xi) + h(\xi)]^2} d\xi + \int_a^b \frac{(\xi - x)^2 - z^2(\xi)}{[(\xi - x)^2 + z^2(\xi)]^2} h^2(\xi) d\xi +$$

$$\frac{2}{3}\int_a^b \frac{\delta z(\xi)\{\delta z^2(\xi) - 3(\xi - x)^2\}}{\{(\xi - x)^2 + \delta z^2(\xi)\}^3} h^3(\xi) d\xi . \quad (8)$$

Відновлення контакту. На основі (8) можна збудувати кілька способів відновлення контакту $x_3(\xi_1)$, $a \le \xi \le b$, за заданим полем $g(x)$, $c \le x \le d$, $[a,b] \subset [c,d]$, $\mathrm{mes}[a,b] < \mathrm{mes}[c,d]$.

Спосіб Ньютона. Вважаючи відомими a, b, H, в результаті розкладу (14) в ряд по $x_3(\xi_1)$, та подальших перетворень знаходимо $\Delta z(\xi) = z_{n+1}(\xi) - z_n(\xi)$

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n{}^2(\xi)} z_{n+1}(\xi) d\xi = \int_a^b \ln\frac{(\xi - x)^2 + H^2}{(\xi - x)^2 + z_n{}^2(\xi)} d\xi - g(x) + \int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n{}^2(\xi)} \Delta z_n(\xi) d\xi . \quad (9)$$

Альтернатива. Якщо вираз (8) записати точністю до $h^2(\xi)$ та $h^3(\xi)$, то після ряду перетворень отримаємо, відповідно, способи *"контакт 1"* та *"контакт 2"*

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi = \int_a^b \ln\frac{(\xi - x)^2 + H^2}{(\xi - x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) . \quad (10)$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi =$$

$$= \int_a^b \ln\frac{(\xi - x)^2 + H^2}{(\xi - x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) + \int_a^b \frac{(\xi - x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)]^2} h_n^2(\xi) d\xi . \quad (11)$$

Рівняння (9-11) можна вирішувати ітеративно, якщо задано $z_0(\xi): z_1(\xi) = z_0(\xi) + h_0(\xi)$.

Проте можна одночасно визначати не лише контакт $z = z(\xi)$, $a \le \xi \le b$, але і "асимптоту" $H = const$, модифікувавши дещо вказані вище способи.

$$\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} \Delta z_n(\xi) d\xi - \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi - x)^2 + H_n^2} \Delta H_n \, d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H_n^2}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} d\xi - g(x) . \quad (12)$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi - x)^2 + H_n^2} \tau_{n+1} d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi - x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) . \quad (13)$$

$$-\int_a^b \frac{2z_n(\xi)}{(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)} h_{n+1}(\xi) d\xi + \int_a^b \frac{2H_n}{(\xi - x)^2 + H_n^2} \tau_{n+1} d\xi = \int_a^b \ln \frac{(\xi - x)^2 + H_{n+1}^2}{(\xi - x)^2 + z_{n+1}^2(\xi)} d\xi - g(x) -$$

$$-\int_a^b \frac{(\xi - x)^2 - H_n^2}{[(\xi - x)^2 + H_n^2]^2} \tau_n^2 d\xi + \int_a^b \frac{(\xi - x)^2 - z_n^2(\xi)}{[(\xi - x)^2 + z_n^2(\xi)]^2} h^2(\xi) d\xi . \quad (14)$$

Початкове наближення контакту. Нехай крива $g(x)$, $c \le x \le d$ має на $[c, d]$ кілька екстремумів у точках $c_i \in [c, d]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Оскільки ми поклали $\delta > 0$, то кожному екстремуму відповідає однойменний екстремум $z = z(\xi)$, $a \le \xi \le b$. Визначимо в множині $\{\underset{[c,d]}{extr}\, g(x)\}$ найбільший і найменший екстремуми (найбільший максимум z_S і найменший мінімум z_i), тобто

$$g_S = g(c_i) = \sup\{\underset{[c,d]}{extr}\, g(x)\}, \ g_i = g(c_j) = \inf\{\underset{[c,d]}{extr}\, g(x)\} .$$

Позначимо через $z_S = z(c_i) = \sup\{\underset{[c,d]}{extr}\, z(\xi)\}$, $z_i = z(c_j) = \inf\{\underset{[c,d]}{extr}\, z(\xi)\}$ відповідні екстремуми z. Тут абсциси g_S і z_S (g_i і z_i) співпадають, що не завжди вірно, але в даному разі так. Початкове наближення контакту можна задавати, щонайменше, двома способами (O*z* спрямована вгору)

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + \Delta g(\xi, H_0), \ a \le \xi \le b, \quad (15)$$

$$z_0 = z_0(\xi) = -H_0 + k_0 \Delta g(\xi), \ a \le \xi \le b, \quad (16)$$

де $H_0 > 0$ – константа, що задається, – "асимптота" функції z_0 на лівому кінці проміжку $[a, b]$, $\Delta g(\xi) = g(\xi) - g(a)$, $\Delta g(\xi, H_0)$ – аналітично продовжене значення $\Delta g(\xi)$ на рівні $-H_0$, $k_0 = k(H_0)$ – коефіцієнт, що підлягає визначенню.

Визначення k_0 у підсумку зводиться до визначення початкових z_S і z_i при заданих H, g_S і g_i:

$$g_S \ge (1 - c_i) \ln \frac{(1 - c_i)^2 + H^2}{(1 - c_i)^2 + z_S^2} + c_i \ln \frac{c_i^2 + H^2}{c_i^2 + z_S^2} + 2H \operatorname{arctg} \frac{H}{H^2 - c_i(1 - c_i)} - 2z_S \operatorname{arctg} \frac{z_S}{z_S^2 - c_i(1 - c_i)} . \quad (17)$$

$$g_i \le (1 - c_j) \ln \frac{(1 - c_j)^2 + H^2}{(1 - c_j)^2 + z_i^2} + c_j \ln \frac{c_j^2 + H^2}{c_j^2 + z_i^2} + 2H \operatorname{arctg} \frac{H}{H^2 - c_j(1 - c_j)} - 2z_i \operatorname{arctg} \frac{z_i}{z_i^2 - c_j(1 - c_j)} . \quad (18)$$

Утворимо функцію $f(z) = (1 - c) \ln[(1 - c)^2 + z^2] + c \ln(c^2 + z^2) + 2z \operatorname{arctg} \dfrac{z}{z^2 - c(1 - c)} -$

$$-(1 - c) \ln[(1 - c)^2 + H^2] - c \ln(c^2 + H^2) - 2H \operatorname{arctg} \frac{H}{H^2 - c(1 - c)} + g . \quad (19)$$

Наближення z_n якогось із значень z_S і z_i визначаємо за схемою Чебишева [1]:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - \frac{f''(z_n) f^2(z_n)}{2 f'^3(z_n)} . \quad (20)$$

Процес (20) при вдалому виборі z_n швидко збігається: 3-4 ітерації для отримання $z^{(0)}$ з точністю до 10^{-7}, що узгоджується з результатами, отриманими в [1].

Обчисливши таким чином для кожного заданого значення H_i^-, $i = 1, 2, \dots, n$, лівої "асимптоти" шуканої кривої $z = z(\xi)$, $a \le \xi \le b$, значення параметрів $z_S^{(i)}$, $z_i^{(i)}$, H_i^+, $i = 1, 2, \dots, n$, визначимо

$$u^{(i)} = z_S^{(i)} - H_i^-, \ u_{(i)} = z_i^{(i)} - H_i^-, \ \Delta H_i = H_i^+ - H_i^-,$$

$$\delta g = g(b) - g(a), \ \delta g_{\max} = g_S - g(a), \ \delta g_{\min} = g_i - g(a),$$

і знайдемо шукані коефіцієнти $k_0^{(i)} = \dfrac{1}{e} \sum_{i=1}^{e} k_i^{(i)}$, де $k_1^{(i)} = \dfrac{|u^{(i)}|}{|\delta g_{\max}|}$, $k_2^{(i)} = \dfrac{|u_{(i)}|}{|\delta g_{\min}|}$, $k_3 = \dfrac{|\Delta H|}{|\delta g|}$.

Відшукання початкових наближень на конкретних моделях контактів буде матеріалом наступної статті.

Висновки. Введено в науковий обіг нові аналітичні конструкції для обчислення складних контактів у вигляді виразів (17), (18). Для їх обчислення запропоновано процес простих ітерацій (20). При чисельному моделюванні вказані вище конструкції виявляють кращу збіжність при обчисленні за способом Ньютона (20) порівняно із класичними прикладами [3], але їх практична ефективність вимагає перевірки на підготовленому матеріалі польових гравіметрових знімань..

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. 2. – Москва, 1960. – С. 140–143; 2. *Гласко В.Б., Страхов В.Н.* Проблема единственности в некоторых обратных задачах геофизики // Проблемы матем. физики и вычисл. математики. – М., 1977. – С. 95-107; 3. *Гравиразведка*: Справочник геофизика. Москва, 1990; 4. *Дубовенко Ю.І.* Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофиз. журн. – 2009. – **31**, № 6. – С. 132-139; 5. *Дубовенко Ю.И.* Об определении погрешностей гравиметрических трансформаций // Там же. – 2011. – **33**, № 1. – С. 136–146; 6. *Остромогильский А.Х.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // ЖВМ и МФ. – 1970. – **10**, № 2. – С. 352–361; 7. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев, 1978; 8. *Страхов В.Н.* К теории обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1974, № 6. – С. 39-60; 9. *Филатов В.Г.* О единственности решения некоторых обратных задач гравиразведки // Физика Земли. – 1974, №11. – С. 97-101; 10. *Чередниченко В.Г.* К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // Докл. АН СССР, сер. Б. – 1978. – **240**, №5, с. 1032-1035; 11. *Чорний А.В., Дубовенко Ю.І.* Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофиз. журн. – 2002. – **24**, № 3. – С. 77–92; 12. *Якимчик А.И.* К вопросу о построении региональных аналитических аппроксимаций элементов аномальных гравитационных полей // Там же. – 2009. – **31**, № 1. – С. 121–124; 13. *Якимчик А.И.* Технология оцифровки карт фактического материала на основе программного обеспечения MapInfo Professional и CorelDraw // Там же. – 2010. – **32**, № 3. – С. 112–124.

Надійшла до редколегії 24.09.12

Дубовенко Ю.И. Начальное приближение для вычисления сложного плотностного контакта.
Dubovenko Yu.I. The initial approximation for calculation of the comlex density interface.

Ключові слова: теорія потенціалу, інтерпретація, аналітичні моделі, контактна задача, класи контактних поверхонь, розділення гравітаційних полів.

Ключевые слова: теория потенциала, интерпретация, аналитические модели, контактная задача, классы контактных поверхностей, разделение гравитационных полей.

Key words: potential theory, interpretation, analytical models, contact problem, classes of contact surfaces, gravity fields separation.